TERCER CORTE CALCULO VECTORIAL

(1)

$z=3-y$ $\quad x^2+(y-1)^2=1$ $\quad z=0$

$$\vec{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} \\ ze^{xz} \\ y^5 \end{pmatrix}$$

Halle $\iint_S \vec{F}\, d\vec{S}$

Usamos teorema de Gaus

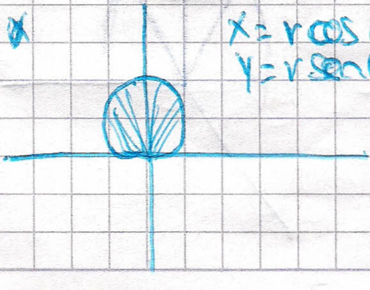
$$\iiint_E \nabla\cdot\vec{F}\, dV \qquad \nabla\cdot\vec{F}=\frac{2x}{2(x^2+y^2)}+0+0$$

$$\iiint_E \frac{1}{(x^2+y^2)}\, dV$$

$$\iint_D \int_0^{3-y} \frac{x}{x^2+y^2}\, dz\, dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta}\int_0^{3-r\operatorname{sen}\theta} \frac{r\cos\theta}{r^2}\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$\hookrightarrow x^2+(y-1)^2=1$

$x=r\cos\theta$
$y=r\operatorname{sen}\theta$



$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta}\int_0^{3-r\operatorname{sen}\theta} \cos\theta\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} \cos(\theta)\,[3-r\operatorname{sen}\theta]\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} 3\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$3\int_0^{\pi}\int_0^{2\,sen\theta} \cos\theta \, dr\,d\theta - \int_0^{\pi}\int_0^{2sen\theta} r\,sen\theta\cos\theta \; dr\,d\theta$$

$$3\int_0^{\pi} 2(sen\theta)\cdot\cos\theta - \int_0^{\pi} sen\theta\cos\theta\cdot 2sen^2\theta \; d\theta$$

$$6\int_0^{\pi} sen\theta\cdot\cos\theta - 2\int_0^{\pi} sen^3\theta\cdot\cos\theta$$

$u = sen\,\theta$ $\qquad$ $u = sen\,\theta$

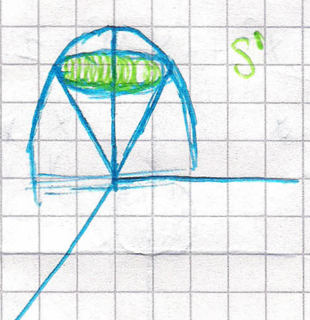
$du = \cos\theta\, d\theta$ $\qquad$ $du = \cos\theta\, d\theta$

$$6\int_{0}^{\cancel{\pi}\,0} u\, du - 2\int_{0}^{\cancel{\pi}\,0} u^3\, du$$

$$\boxed{0}$$

② Sea C : $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad$ $z = 2 - x^2 - y^2$

Sea $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x^2 y \\ x y^2 \\ (x^2+y^4)^{z} \end{pmatrix}$ $\qquad$ Orientado en sentido antihorario desde $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix}$



Halle $\int_C \vec{F}\, dr$

$z = 2 - (x^2+y^2)$

$z^2 = x^2 + y^2$

$z = 2 - z^2$ $\qquad$ $z^2 + z - 2$

$(z+2)(z-1)$

$\cancel{z=-2}$ $\quad z = 1$ $\quad z > 0$

TEOREMA DE STOCKS

$$\oint_C \vec{F}\, dr = \iint_S \nabla \times \vec{F}\, \vec{ds} = \iint_{S'} \nabla \times \vec{F}\, \vec{ds}$$

$\hookrightarrow$ Superficie donde $z = 1$

$$1 = 2 - x^2 - y^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

$$\iint_{S'} \nabla \times \vec{F}\, \vec{ds}$$

$\hookrightarrow x^2+y^2=1$

$x = x$
$y = y$
$z = 1$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} I & J & K \\ F_x & F_y & F_z \\ -x^2y & xy^2 & (x^2+y^4)^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7(x^2+y^4)(4y^3) \\ 7(x^2+y^4)^6(2x) \\ y^2 + x^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{ds} = r_x \times r_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iint_{S_1} \begin{pmatrix} 7(x^2+y^4)(4y^3) \\ 7(x^2+y^4)^6(2x) \\ y^2 + x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx\,dy$$

$$\iint_{S_1} x^2 + y^2 \; dx\, dy$$

Por la naturaleza de la region hacemos la integral por polares

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\, r\, dr\, d\theta \quad = \boxed{\frac{2\pi}{4}}$$

$$2\pi \int_0^1 r^3\, dr\, d\theta \quad = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

(3) $\int_C \vec{F}\, d\vec{r}$ $\quad r(t) = \begin{pmatrix} 2+\cos(2t)\cdot\cos(t) \\ 2+\cos(2t)\cdot \text{sen}(t) \\ \text{sen}(6t) \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le t \le \pi/2$

$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2xz \\ 3y^2 \\ x^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} = f_x \\ = f_y \\ = f_z \end{matrix}$ Analizamos si el campo es conservativo

$$\text{Rot}\, \vec{F} = \begin{pmatrix} I & J & K \\ f_x & f_y & f_z \\ 2xz & 3y^2 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0-0 \\ -(2x-2x) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Campo conservativo

Existe una F tal que

$\nabla F = \vec{F}$

Entonces buscamos F

$F = \int 2xz\, dx$

$F = x^2 z + g(y,z)$

~~$F_y =$~~

$F_y = 0 + g'(y,z)$

$\int 3y^2 = \int g'(y,z)$

$y^3 = g(y,z)$

$F = x^2 z + y^3 + g(z)$ $\rightarrow$ Notemos que el ∇F es $\vec{F}$ vectorial que tenemos, entonces $g(z) = 0$

$F = x^2 z + y^3$

Hallemos $r(b)$ y en $r(a)$ para cumplir con el teorema fundamental de las integrales de línea. $\left[F(r(b)) - F(r(a)) \right.$

$r(b)$

$$r(\pi/2) = \begin{pmatrix} (1)(0) \\ (1)(1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$r(a)$

$$r(0) = \begin{pmatrix} (3)\cdot(1) \\ 3\cdot(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F(r(b)) - F(r(a))$

$1 - 0$

$\boxed{1}$

(4) Solución $\displaystyle\int_c \begin{pmatrix} 6y + e^{x^2} \\ 2x + \cos(y) \end{pmatrix} \begin{array}{c} M \\ N \end{array} dr$

Analicemos si el campo es conservativo

Siendo: $c = (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

$M_y \neq N_x$

$6 \neq 2$ NO conservativo, Teorema de Green

$$\iint_S (N_x - M_y)\, dA$$

$$\iint_S 2 - 6 \quad dA$$

$$-4 \boxed{\iint_S dA}$$

Area de la circunferencia dada en C

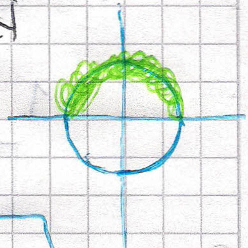
$\hookrightarrow \pi r^2 = 4\pi$

$$-4(4\pi)$$

$$\boxed{-16\pi}$$

(5) Sea $C = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2 \quad y \geq 0$

Sea $f(x,y) = x + 2y$



Integral de línea campo escalar $\int_C f \, dr$

Parametricemos C

$x = \sqrt{2} \cos\theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

$y = \sqrt{2} \operatorname{sen}\theta$

$\sqrt{2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}$

$dr = \|r'(\theta)\| = \left\| \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta \end{pmatrix} \right\|$

$$\int_0^{\pi} (\sqrt{2} \cos\theta + 2\sqrt{2} \operatorname{sen}\theta) \sqrt{2} \, d\theta$$

$$\int_0^{\pi} 2\cos\theta + 4 \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$2\int_0^{\pi} \cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta \Big|_0^{\pi}$$

$$0 - 2(-1) - [0 - 2(1)]$$

$$2 + 2$$

$$\boxed{4}$$

⑥ $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^y \\ xe^y + e^z \\ e^z + e^y \end{pmatrix}$ Este campo es conservativo?

Si el campo es conservativo

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_z \\ e^y & xe^y + e^z & e^z + e^y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} e^y - e^z \\ 0 - 0 \\ e^y - e^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y - e^z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\nabla \times \vec{F} \neq 0$ NO CONSERVATIVO

⑦ Cual es la divergencia del campo anterior en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$0 + xe^y + e^z$$

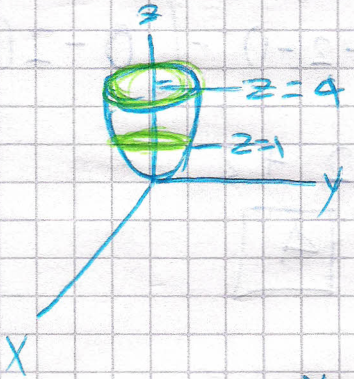
$$e^1 + e^1$$

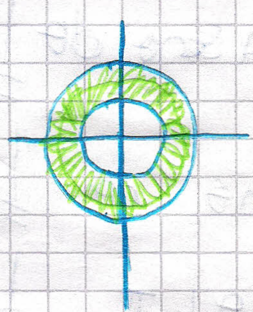
$$\boxed{2e}$$

8) Sea $S = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2$

$1 \leq z \leq 4$

Cual seria una parametrizacion?





$x^2+y^2=4$

$x^2+y^2=1$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = r^2 \end{cases}$$

9) Sea el campo $\vec{F}(x, y, z) = 2x^2y + z^2 + z$

Siendo que la linea (c) va de

Halle $\int_c \nabla f \, dr$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

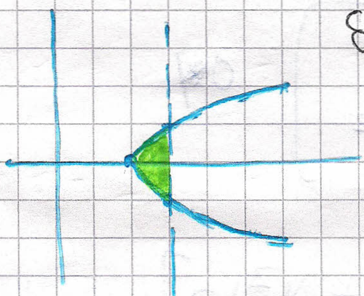
Si tenemos que $\vec{F} = \nabla f$ estamos diciendo que el campo es conservativo y nos dan F solo resto evalua

$F(r(b)) - F(r(a))$

↳ Punto final ↳ Punto inicial

$\boxed{2}$

(10) $\int_C \begin{pmatrix} y^2 - \ln(x) \\ \sqrt{y^2+1} + 3xy + x \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} M \\ N \end{matrix}$



Siendo C la region acotada

$x = y^2+2$

$x = 3$

Orientada en sentido antihorario

Siendo un campo vectorial de dos componentes podemos usar el TEOREMA DE green ya que no es conservativo

$M_y = 2y$

$N_x = 3y + 1$

T.6

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_S (N_x - M_y)\, dA$$

$$= \iint_S 3y + 1 - 2y \; dA = \iint_S y + 1 \; dA$$

$$\int_{-1}^{1} \int_{y^2+2}^{3} y+1 \; dx\, dy = \text{[illegible]}$$

$$\int_{-1}^{1} \left[yx + x \Big|_{x=y^2+2}^{x=3} \right] dy$$

$$\int_{-1}^{1} 3y + 3 - \left[y(y^2+2) + y^2 + 2 \right] dy$$

$$\int_{-1}^{1} \cancel{3y} \cancel{+3} - y^3 \cancel{-2y} - y^2 \cancel{-2} \; dy$$

$$\int_{-1}^{1} -y^3 - y^2 + y + 1 \; dy$$

$$-\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + y \Big|_{-1}^{1}$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right]$$

$$-\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} + 1 + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + 1$$

$$-\frac{2}{3} + 2 \qquad \boxed{\frac{4}{3}} =$$

(11) Una helicoide S es una superficie $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$

$$(r,\theta) \to \varphi(r,\theta) = (x,y,z)$$

Donde

$$\begin{cases} x = r\,\text{sen}\,\theta \\ y = \theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{y } D \quad \begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}$$

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + z^2 + 1}$$

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds$$

Integral de superficie de campo escalar

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) + 1}\; ds$$

$$ds = \| r_\theta \times r_r \| = \left\| \begin{pmatrix} i & j & k \\ r\cos\theta & 1 & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -(r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\theta) \\ -\text{sen}\,\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -r \\ -\text{sen}\,\theta \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta + r^2} = \sqrt{1 + r^2}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\cdot\sqrt{r^2+1}\; dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 + 1 \; dr\,d\theta$$

$$2\pi \left[\frac{r^3}{3} + r \Big|_0^1\right] = 2\pi \, \frac{4}{3}$$

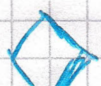
$$2\pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1}\right) = \boxed{\frac{8\pi}{3}}$$

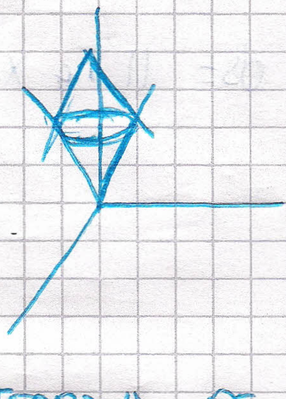
(12) Sea S la frontera del solido limitado por las superficies

$$z = 2\sqrt{x^2+y^2} \qquad z = 3 - \sqrt{x^2+y^2}$$

Orientada con el vector normal apuntando hacia afuera calcule el flujo si

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} e^{\ln(z^2+y)} + x^3 \\ z^2 \quad e^{\ln(z^2+\cancel{y})} \\ \cos(\cancel{x}^8+y^2) + 3zy^2 \end{pmatrix} \qquad \iint_S \vec{F}\, d\vec{s}$$





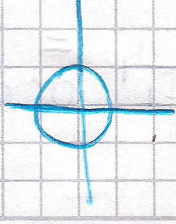
$$2\sqrt{x^2+y^2} = 3 - \sqrt{x^2+y^2}$$

$$3\sqrt{x^2+y^2} = 3$$

TEOREMA DE GAUS

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1$$

$$\boxed{x^2+y^2=1}$$



$$\iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV \qquad \operatorname{div} \vec{F} = 3x^2 + 3y^2 = 3(x^2+y^2)$$

$$3\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{2r}^{3-r} r^2 \, dz \, r \, dr \, d\theta \qquad = 18\pi \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right]$$

$$3\int_0^{2\pi}\int_0^{1} 3-r-2r \, (r^3) \, dr \, d\theta \qquad = 18\pi \, \frac{1}{20}$$

$$9(2\pi)\int_0^{1} (1-r)(r^3) \, dr \, d\theta \qquad = \boxed{\frac{9\pi}{10}}$$

$$18\pi\int_0^{1} r^3 - r^4 \, dr \, d\theta \qquad =$$

(13) Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^y \\ e^{xyz} \end{pmatrix}$

(a) El campo es conservativo?

Si es conservativo $\nabla \times \vec{F} = 0$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_z \\ e^x & e^y & e^{xyz} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} xze^{xyz} - 0 \\ -(yze^{xyz} - 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ NO es conservativo

(b) $\operatorname{div} \vec{F}(1,1,0) = 2e$?

$e^x + e^y + xy e^{xyz}$ FALSO

$e + e + 1 = 2e + 1$

(c) $\text{rot}\,\vec{F}\,(1,1,1) = (e,e,e)$?

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} xz\, e^{xyz} \\ -yz\, e^{xyz} \\ 0 \end{pmatrix}$$

FALSO

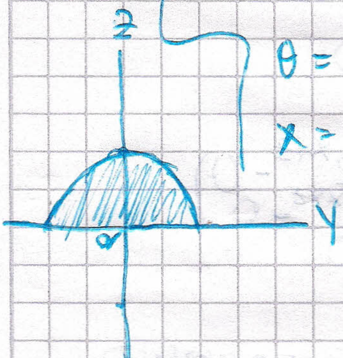
$$\begin{pmatrix} e \\ -e \\ 0 \end{pmatrix}$$

(14) La parte del cilindro $y^2+4z^2=16$ entre los planos $x=1$ $x+y=5$ y por encima del plano $z=0$, ¿cuál sería una parametrización

$$\begin{cases} x = x \\ y = 4\cos\theta \\ z = 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \theta = [0,\pi] \qquad x = [1, 5-4\cos\theta]$$

$$y^2+4z^2=16$$

$$\frac{y^2}{4}+z^2=4$$



(15) El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo del segmento que va $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

ES:

TFIL

Para eso necesitamos que $\vec{F} = \nabla f$

y f sera

$$f = xy + xz + yz$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}$$

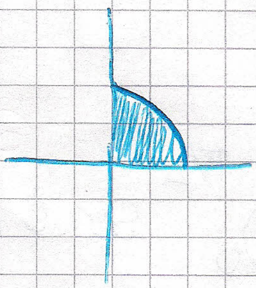
$$f(r(b)) - f(r(a))$$

$$6 - 1$$

$$\boxed{5}$$

(16) Evalue $\int_C \begin{pmatrix} \tan(1+e^x) + xy \\ \ln(2+e^y) + 3x^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \begin{matrix} dx \\ dy \end{matrix}$ Donde C es la frontera de la region D

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$



Conservativo si $M_y = N_x$

$M_y = x \qquad N_x = 6x$

TEOREMA $\iint_D (6x - x)\, dA$

$$\iint_D 5x \, dA$$

↳ Polares

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 5r\cos\theta \, r\,dr\,d\theta$$

$$5\int_0^{\pi/2}\cos\theta\int_0^1 r^2 \, dr\,d\theta$$

$$\frac{5}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\theta$$

$$\frac{5}{3}\,\text{sen}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{\frac{5}{3}}$$

17 a) Sea E el solido acotado por

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

y el plano $z=0$

$$\iiint_E x^2+y^2+z^2$$

Punto combinado con el parcial anterior

A esfericas

↳ $x^2+y^2+z^2=1$

$x^2+y^2+z^2=4$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 \rho^2\rho^2 \,\text{sen}\,\phi$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 \rho^4 \,\text{sen}\,\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$\frac{2\pi}{5}\int_0 \text{sen}\,\phi \;\; \rho^5\Big|_1^2$$

$$\frac{2\pi}{5} \; 32-1 \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,\phi \, d\phi$$

$\frac{62\pi}{5}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi \;=\; \boxed{\frac{62\pi}{5}}$

$\frac{62\pi}{5}\left[-\cos\phi \Big|_0^{\pi/2}\right]$

$0 + 1$

(b) Sea S la superficie el solido E con vector normal apuntando hacia afuera del solido

$$\vec{F}(x,y,z) \begin{pmatrix} \frac{4}{3}x^3 + x\,\operatorname{sen}(y) + \tan(x) \\ 4yz^2 + \cos(y) \\ 4y^2 z + \ln(x+y) - z\sec^2 x \end{pmatrix}$$

Calcule el flujo a traves de S

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} =$$ Por ser solido teorema de Gauss

$$= \int_E \operatorname{div} \vec{F}\, dV$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_1^{2} 4x^2 + \cancel{\operatorname{sen}(y)} + \cancel{\sec^2(x)}$$

$$+ 4z^2 - \cancel{\operatorname{sen}(y)} + 4y^2 - \cancel{\sec^2(x)}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_1^{2} 4x^2 + 4z^2 + 4y^2 \quad \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho\, d\phi\, d\theta$$

4 veces la integral del punto anterior

$$4 \cdot \frac{62\pi}{5} = \boxed{\frac{248\pi}{5}}$$

8) Evalue $\iint_S \nabla \times \vec{F} \, d\vec{s}$ donde S es la parte del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ encima del plano $z=0$, orientado con vector normal apuntando hacia arriba y

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y + e^{\sec(z)} \\ 3x + e^{\tan(z)} \\ \ln(z^3 + x^3 + y^3) \end{pmatrix}$$

TEOREMA DE STOCK

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \, d\vec{s} = \iint_{S_1} \nabla \times \vec{F} \, d\vec{s}$$

$\hookrightarrow z=0$

Superficie de nivel 0

$z=0$

$0 = 9 - x^2 - y^2$

$x^2 + y^2 = 9$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y+e \\ 3x+1 \\ \ln(x^3+y^3) \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_z \\ y+e & 3x+1 & \ln(x^3+y^3) \end{vmatrix}$$

$$\frac{3y^2}{x^3+y^3}$$

$$-\frac{3x^2}{x^3+y^3}$$

$$3-1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3y^2}{x^3+y^3} \\ \frac{-3x^2}{x^3+y^3} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = x$
$y = y$
$z = 0$

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

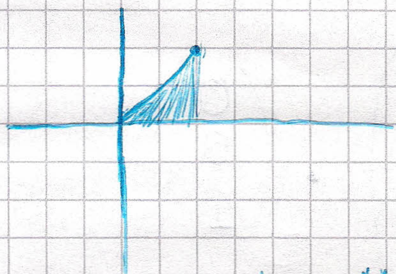
$$\iint_S 2 \, dA$$

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^3 r\,dr\,d\theta$$

$$2\pi \cdot 9 \qquad \boxed{18\pi}$$

(19) Sea C la porción de la gráfica de $y=x^3$ con $x \in [0,1]$. Supongamos que la densidad de masa en cada punto (x,y) de C es igual a e^{-y}. Escoja una parametrizar la curva C y complete los espacios en blanco en la siguiente expresión para la masa M de C

$$\int_C e^{-y}\, ds =$$



$x = t$
$y = t^3$

$ds = \| r'(t) \|$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 e^{-t^3} \sqrt{9t^4+1}\, dt$$

(20) Sea $\varphi = \varphi(x,y,z)$ una función de valor real con derivadas parciales continuas y definamos el campo

$$\vec{F} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}$$

Considere las siguientes afirmaciones para la curva C definida por la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=5$ con el plano $z=2$ orientado de manera antihorario si se mira desde arriba

(A) $\oint_C \vec{F} \cdot dr = 0$ Correcta por que es un círculo con el punto final igual a punto inicial

(B) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}\begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

(C)

Se parametrizo con polares entonces es correcto

21) Sean

$S_1 = \{(x,y,z) \mid z = x^2+y^2, z \leq 4$

$S_2 = \{(x,y,z) \mid z = 4, x^2+y^2 \leq 4$

Orientadas con el normal hacia arriba y C la frontera de S_2 orientada de manera antihoraria si se mira desde arriba para un plano $\vec{F}(x,y,z)$ con derivadas continuas considere las siguientes afirmaciones

(A) $\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \vec{n}\, ds = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, ds$

VERDADERO por C es igual para ambos

(B) $\int_C (\nabla \times \vec{F})\, d\vec{r} = \iint_{S_2} \vec{F}\, d\vec{s}$

Falso

22) Sean $\vec{F}(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$

y C la curva definida por la parametrizacion

$\vec{r}(t) = ((1-t)^5, (1-t)^7, 3(1-t)^9$ con $t\ [0,1]$

Halle $\int_c \vec{F}\, d\vec{r}$

TFIL

$f = zyx^2$ $\nabla f = \begin{pmatrix} 2xyz \\ zx^2 \\ yx^2 \end{pmatrix}$

entonces $\Rightarrow$ ~~zyx^2~~ Conservativo

$F(r(b)) - F(r(a))$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{-3}$

(23) Sea c la frontera de la region acotada por las curvas $y=x$ $y=x^6$ $x\in[0,1]$ con orientacion positiva (contrahoraria)

Calcule

$$\int_c \begin{pmatrix} 3x^3y + \sqrt{x^8+1} \\ x^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$ M N

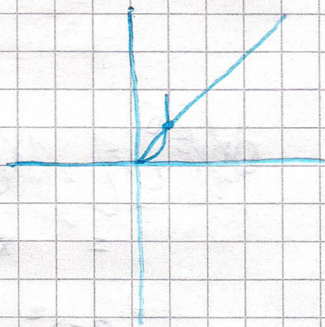
$M_y = 3x^3$

$N_x = 4x^3$

TEOREMA DE GREEN

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \iint_S N_x - M_y \, dA$$

$$\iint$$



$$\int_0^1 \int_{x^6}^{x} x^3 \, dy \, dx$$

$$\int_0^1 x^3 (x - x^6) \, dx$$

$$\int_0^1 x^4 - x^9 \, dx \qquad = \frac{1}{5} - \frac{1}{10}$$

$$\frac{x^5}{5} - \frac{x^{10}}{10} \Big|_0^1 \qquad \frac{5}{50} \quad \boxed{\frac{1}{10}}$$

24) Sea D la region acotada inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ y superiormente por el cilindro $z = 2 - x^2$. Sea S la frontera de D orientada con el normal hacia afuera para el campo

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} z + x + xy^2 \\ \operatorname{sen}(x^3 - z^3) \\ z x^2 + e^{(x^2 + y^2)} \end{pmatrix}$$

Halle

$$\iint_S \vec{F} \, d\vec{s}$$

Por la naturaleza de la region T. Gauss

$$\iint \vec{F}\, d\vec{s} = \iiint \operatorname{div} \vec{F}\, dv$$

$$\cancel{\operatorname{div}\vec{F} = x^2 + y^2 + 0 + x^2}$$

$$\cancel{= x^2 + y^2 + 1}$$

$$\cancel{\iint_D \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} (x^2+y^2+1)\, dz\, dA}$$

$$\cancel{2 - x^2 - (x^2 + 2y^2)}$$

$$\cancel{\iint_D (2 - 2x^2 - 2y^2)(x^2+y^2+1)}$$

Para la integral usemos cilindricas

$$\iint_D (2 - 2x^2 - 2y^2)(x^2 + y^2 + 1)$$

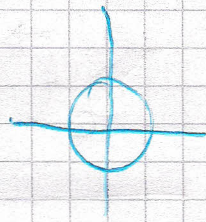
$$(2 - 2r^2)(r^2 + 1)\, r\, dr\, d\theta$$

$$\iint_D (2 - 2r^2)(r^3 + r)\, dr\, d\theta$$

$V=$ $z = x^2 + 2y^2$ $2-x^2 = x^2+2y^2$

$z = 2-x^2$ $2 = 2r$

$\boxed{r=1}$



$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \cancel{2r^3} + 2r - 2r^5 - \cancel{2r^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 -2r^5 + 2r \quad dr\,d\theta$$

$$4\pi\left[\frac{-r^6}{6} + r^2 \Big|_0^1\right]$$

4π $\frac{-1}{6} + 1$ $\frac{20\pi}{6}$ $\boxed{\frac{10\pi}{3}}$

$\frac{-1}{6} + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$

$\frac{4}{12}$ $\frac{1}{3}$ $\boxed{\frac{4\pi}{3}}$

(25) Sea $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3-y^3 \\ x^3+y^3 \\ e^{\cos^2(z)} \end{pmatrix}$ y C la curva de intersección del cilindro $x^2+y^2=4$ con el plano $2x+y+z=8$ orientada de manera antihoraria si se mira desde el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$

Calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} =$$ TEOREMA DE STOCKS

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} I & J & K \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^3-y^3 & x^3+y^3 & e^{\cos^2(z)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 3x^2+3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \, \vec{n} \, dS \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \iint \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2+y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dA$$

$$\iint_S 3x^2+3y^2 \, dA = 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2 \, r \, dr d\theta = 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3 \, dr d\theta = \frac{3}{4} 2\pi \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \right)$$

$\boxed{24\pi}$

(26) $S_1 = \{ (x,y,z) \mid z = \sqrt{x^2+y^2} \quad z \leq 2 \}$

Orientada con el normal tiene tercera componente negativa y

$S_2 = \{ (x,y,z) \mid z = 2, \ x^2+y^2 \leq 4 \}$

Orientada con el normal hacia arriba

Sea C la frontera de S_1 y de S_2 Orientada de manera antihoraria vista desde arriba sea $\vec{F} = F(x,y,z)$ un campo con divergente nulo. Considere las siguientes Afirmaciones

(A) $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_2} \vec{F} \, d\vec{S}$?

VERDADERO

(B) $\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (2\cos t, \ 2\,\text{sen}(t), \ 2) \cdot (-2\,\text{sen}(t), 2\cos(t), 0) \, dt$